1. ***BÀI TẬP VỀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN***

*Trước hết cần nhắc lại một số kiến thức cơ bản:*

* *Ta có nhận xét nếu là một song ánh, khi đó hàm mật độ của sẽ xác định bởi*

* *Hàm phân phối bậc k của quá trình ngẫu nhiên xác định bởi vec tơ ngẫu nhiên là hàm phân phối đồng thời*
* *Hàm mật độ bậc k của quá trình ngẫu nhiên xác định bởi vec tơ ngẫu nhiên là hàm xác định bởi*

*,*

*trong trường hợp liên tục, ta sẽ có*

* *Hàm tự tương quan (autocorrelation function) xác định bởi*

* *Hàm hiệp phương sai (autocovariance fuction) xác định bởi*

* *Hệ số tương quan (correlation coefficient) xác định bởi*

* *Ta nói rằng quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng chặt - dừng theo nghĩa hẹp, nếu các phân phối hữu hạn chiều của nó thỏa tính chất:*

*với mọi .*

* *Ta nói rằng quá trình ngẫu nhiên là quá trình dừng theo nghĩa rộng nếu nó thỏa các điều kiện:*

*Kỳ vọng bằng hằng số.*

*.*

***Bài tập 1.1***

*Cho quá trình ngẫu nhiên xác định bởi*

*Trong đó Y là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [0,1], hãy tính*

1. *Hàm mật độ bậc nhất của*
2. *Kỳ vọng của quá trình ngẫu nhiên*
3. *Hàm tự tương quan*

***Hướng dẫn giải***

1. *Theo đề bài ta có*

*Vậy hàm mật độ bậc nhất của xác định bởi*

1. *Kỳ vong của tính được bởi*

1. *Để tính hàm tự tương quan trước hết ta xét*

*⇒*

***Bài tập 1.2***

*Cho là vec tơ ngẫu nhiên có phân phối chuẩn* ***N(0, )***

*Trong đó* ***0*** *=(0,0,…,0) và* *là ma trận đơn vị cấp n. Gỉa sử có các phân phối chuẩn tắc (N(0,1))và chúng độc lập trên toàn thể*

*Hãy tính*

***Hướng dẫn giải***

1. *.*

*(Vì*

1. *Var*

*(Xem lại các tính chất của các momen phân phối chuẩn).*

***Bài tập 1.3***

*Cho Y là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [-1, 1], Ta xét biến ngẫu nhiên:*

*có phải là quá trình dừng hay không? Tại sao.*

***Hướng dẫn giải***

*Ta có nhận xét*

*Vì vậy không phải là quá trình dừng manh và cũng không phải là quá trình dừng yếu.*

***Bài tập 1.4***

*Cho là quá tr2inh Wiener tiêu chuẩn, xét quá trình xác định bởi*

1. *Hãy tính kỳ vọng của*
2. *Hãy tính hàm hiệp phương sai*
3. *Qúa trình là quá trình Gauss, là quá trình dừng, hay là chuyển động Brown ?*

***Hướng dẫn giải***

*(Vì*

*Mặt khác,sử dụng tính chất , ta sẽ thu được:*

*+=*

1. *\* là quá trình Gauss vì nó là tổng 2 quá trình Gauss*

*\*\* không phải là quá trìn dừng vì phụ thuộc vào t.*

*\*\*\* không phải là chuyển động Brown.*

1. ***BÀI TẬP VỀ XÍCH MARKOV***

* ***Bài tập 2.1***

*Cho ma trận xác suất chuyển một bước của xích Markov có dạng*

*Với tập trang thái tương ứng là .*

1. *Với giá trị nào của thì các trạng thái của xích đều liên thông.*
2. *Khi thì xích có tồn tại trạng phân phối dừng không, nếu có hãy tìm phân phối dừng đó.*

* ***Hướng dẫn giải***

1. *Với giá trị*

*thì các trạng thái của xích đều liên thông.*

1. *Phân phố dừng sẽ tìm được từ hệ phương trình*

*Giải hệ ta sẽ tìm được phân phối dừng là*

*;*

* ***Bài tập 2.2***

*Cho ma trận xác suất chuyển một bước của xích Markov có dạng*

*Trong đó*

*Xích có tồn tại trạng phân phối dừng không, nếu có hãy tìm phân phối dừng đó.*

* ***Hướng dẫn giải***

*Nếu P là chính quy, nghĩa là tồn tại sao cho: (hay nói một cách khác các trang thái của nó đều liên thông) thì sẽ tồn tại phân phối dừng.*

*Trong thường hợp của bài này P là chính quy, nên sẽ tồn tại phân phối dừng.*

*Giải hệ phương trình: .*

*Ta sẽ thu được nghiệm là*

* ***Bài tập 2.3***

*Cho ma trận xác suất chuyển một bước của xích Markov có dạng*

*trong đó tập trạng thái của xích Markov là*

1. *Hãy tính*
2. *Hãy tìm chu kỳ cho các trạng thái của xích Markov nói trên.*

* ***Hướng dẫn giải***

1. *Khi n =2k (n là số chẵn) ta có*

*Khi n =2k+1 (n là số lẻ) ta có:*

1. *Dựa váo kết quả câu 1) ta thấy rằng chu kỳ của các trang thái bằng 2.*

* ***Bài tập 2.4***

*Cho ma trận xác suất chuyển một bước của xích Markov có dạng*

*Với các trạng thái là*

1. *Với giá trị nào của thì các trạng thái của xích đều liên thông.*
2. *Với hãy tìm phân phối dừng tương ứng.*
3. *Biết rằng phân phối dừng có hãy tìm các giá trị tương ứng của*

* ***Hướng dẫn giải***

1. *Với giá trị: , thì các trạng thái của xích đều liên thông.*
2. *Giải hệ phương trình: .*

*Ta sẽ thu được nghiệm là:*

1. *Các giá trị tương ứng sẽ là:*